数理解析研究所講究録
1056 巻 1998 年 59-67

熊ノ郷-谷口の定理の簡単な証明について

学習院大学理学部 藤原大輔 (Daisuke Fujiwara)[1]
工学院大学 熊ノ郷直人 (Naoto Kumano-go)
大阪府立大学総合科学部 谷口和夫 (Kazuo Taniguchi)[2]

1 はじめに

$j=1,2,\ldots,k$にたいし相関数$\phi_j\equiv\phi_j(x,\xi)$ と振幅関数 $a_j\equiv a_j(x,\xi,y)$ をもつ Fourier 積分作用素を

$$I(\phi_j,a_j)f(x)=\int_{\mathrm{R}^{2n}}a_j(x,\xi,y)e^{i(\phi_j(x,\xi)+(x-y)\xi)}f(y)dy$$

と表す。これら k個の積分変換の合成を作る。$\phi_j(x,\xi)$ を母関数とする正準変換χ_jが十分恒等写像に近く、それらの合成写像$\chi_k\chi_{k-1}\cdots\chi_1$がまた、十分恒等写像に近く、その母函数を$\phi$とするならば 一つの振幅関数 b が存在して、

$$I(\phi_k,a_k)I(\phi_{k-1},a_{k-1})\cdots I(\phi_1,a_1)=I(\phi,b)$$

と表されるというのは有名な事実である。(例えば、Hörmander[5])。

対応 $(a_1,a_2,\ldots,a_k)\rightarrow b$ は多重線形である。この写像の連続性を考察したい。振幅関数のノルムとして次のノルムを採用する。

$$\|a\|_m=\max\sup_{(x,\xi,y)}|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,\xi,y)|$$

ここで、max は $|\alpha|+|\beta|+\gamma|\leq m$ で取る。

熊ノ郷一谷口 [7] は、この多重線形写像が、振幅関数のこのノルムに関し単に連続であるばかりで無くもっと強い結論を導くことを意味する次の評価を示した。任意の $m\geq 0$ に対して、ある自然数 $M(m)$ と $C(m)>0$ が存在して

$$\|b\|_m\leq C_m^k\prod_{j=1}^k\|a_j\|_{M(m)}$$

ここで $M(m)$、C_mは kによらないことがこの評価 の特徴である。

この熊ノ郷一谷口の定理は、色々応用がある。しかし、この定理の元の証明は、かなりまわりくどい、今回は、直接的な証明を紹介する。詳細は [8] を参照していただきたい。

[1]平成 7 年度文部省科学研究費補助金基盤 C(2)07640244 による助成
[2]平成 7 年度文部省科学研究費補助金基盤 C(2)07640237 による助成

2 結果

Fourier 積分作用素としては、次の形のものを扱う。$j=1,2,\ldots,L$ にたいして、

$$I(t_j\phi_j,a_j)u(x)=\Big(\frac{\nu}{2\pi}\Big)^d\int_{\boldsymbol{R}^{2d}}e^{-i\nu(t_j\phi_j(x,\xi,y)-(x-y)\xi)}a_j(x,\xi,y)u(y)dyd\xi$$

ここで $t_1,t_2,\ldots,t_L$ は小さい正の parameters であって $\nu>>1$ も parameter とする。この積分は、絶対収束はしないから、振動積分の意味とする。

これらの積分変換の合成は

$$\begin{aligned}&I(t_L\phi_L,a_L)\ldots I(t_1\phi_1,a_1)u(x_L)\\ =\ &\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^d\int_{R^{2d}}e^{i\nu(x_L-x_0)\xi_L}K(x_L,\xi_L,x_0)u(x_0)d\xi_L dx_0,\end{aligned}\tag{1}$$

であり、ここで

$$K(x_L,\xi_L,x_0)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{d(L-1)}\int_{R^{2d(L-1)}}e^{-i\nu\Phi}\prod_{j=1}^{L}a_j(x_j,\xi_j,x_{j-1})\prod_{j=1}^{L-1}d\xi_j dx_j,$$

であって

$$\Phi=t_L\phi_L(x_L,\xi_L,x_{L-1})+(x_{L-1}-x_0)\xi_L+\sum_{j=1}^{L-1}\{t_j\phi_j(x_j,\xi_j,x_{j-1})-(x_j-x_{j-1})\xi_j\}.\tag{2}$$

である。熊ノ郷一谷口の定理を示すには、$K(x_L,\xi,x_0)$ を扱えば良い。

しかし応用を念頭におくと これより少し一般的な次の形の振動積分を扱いたい。

$$\begin{aligned}&I(\Phi,a,\nu)(x_L,\xi_L,x_0)\\ =\ &\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{d(L-1)}\int_{R^{2d(L-1)}}e^{-i\nu\Phi}a(x_L,\xi_L,\ldots,x_1,\xi_1,x_0)\prod_{j=1}^{L-1}d\xi_j dx_j\end{aligned}\tag{3}$$

ここで $a(x_L,\xi_L,\ldots,x_1,\xi_1,x_0)$ はある振幅関数である。

ここから以後記号単純化のため $d=1$ とする。勿論すべての議論は、$d>1$ でもそのままなりたつ。

相関数に関する仮定は次のとうりである。

仮定 2.1 任意の 自然数 $m\geq 2$ にたいして j によらぬ正定数 κ_m が存在して次の不等式が成り立つ。

$$\max_{2\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq m}\ \sup_{(x,\xi,y)\in R^3}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_y^\gamma\phi_j(x,\xi,y)|\leq\kappa_m,\quad j=1,2,\ldots,L.\tag{4}$$

x_L, ξ_Lと x_0を固定し, 位相関数Φ を変数 (x,ξ) の関数と考える。以後 (x,ξ) によって $(x_1,\dots,x_{L-1},\xi_1,\dots,\xi_{L-1})$ を表す。関数 Φの停留点を考える。そのため、$j=1,\dots,L-1$ にたいし次の 2 種類の関数を導入する。

$$
\begin{aligned}
\zeta_j(x_{j+1},\xi_{j+1},x_j,\xi_j,x_{j-1}) &\equiv \partial_{x_j}\Phi \qquad (5)\\
&= \xi_{j+1}-\xi_j+t_j\partial_{x_j}\phi_j(x_j,\xi_j,x_{j-1})+t_{j+1}\partial_{x_j}\phi_{j+1}(x_{j+1},\xi_{j+1},x_j)\\
z_j(x_j,\xi_j,x_{j-1}) &\equiv \partial_{\xi_j}\Phi=-x_j+x_{j-1}+t_j\partial_{\xi_j}\phi_j(x_j,\xi_j,x_{j-1}), \qquad (6)
\end{aligned}
$$

簡単のため $(z_1,\dots,z_{L-1},\zeta_1,\dots,\zeta_{L-1})$ を (z,ζ) と表す。

相関数 Φの停留点 (x^*,ξ^*) は次の方程式系の解である。

$$(z,\zeta)=(0,0),$$

ここで$\xi_L^*=\xi_L$ と $x_0^*=x_0$ は与えられている。これを論じるために次の写像を扱う。

$$\mathcal{F}:\boldsymbol{R}^{2(L-1)}\ni(x,\xi)\to(z,\zeta)\in\boldsymbol{R}^{2(L-1)}.$$

すると $(x^*,\xi^*)=\ \mathcal{F}^{-1}(0,0)$ である。よって $\mathcal{F}$ のヤコビ行列式 J を考える必要がある。$\sum_{j=1}^L t_j=T_L$が小さいならば写像 $\mathcal{F}$ は 大変良い性質を持つことを示そう。

命題 2.1 上の仮定 *2.1*を置く。 $5\kappa_2 T_L<1$ とするならば、次の事柄が成立する：

1. 写像 $\mathcal{F}$ のヤコビ行列式 J は次の評価を持つ。

$$(1-5\kappa_2T_L)^{2L-2}\le|J|\le(1+5\kappa_2T_L)^{2L-2} \qquad (7)$$

2. 写像 $\mathcal{F}$ は大域的微分同相である。

3. 相関数Φの停留点 (x^*,ξ^*) は唯一つ存在する。

振幅関数に関する仮定は

仮定 2.2 各非負整数 $K\ge0$ に対して次の不等式を成り立たせる定数 A_kが存在する。

$$\max_{|\alpha_j|,|\beta_j|\le K}\ \sup_{(x_L,\xi_L,\dots,\xi_1,x_0)}\left|\partial_{x_0}^{\alpha_0}\prod_{j=1}^{L}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_j}^{\beta_j}a(x_L,\xi_L,\dots,x_1,\xi_1,x_0)\right|<A_k. \qquad (8)$$

ここで max は $\alpha_j\le K$ と $\beta_j\le K$が $1\le j\le L-1$ に対して成り立つように取る。

Φ^* は Φの停留値のこととする。熊ノ郷一谷口の評価は次の定理から従う:

定理 2.1 *2.1*と *2.2*を仮定する。各 t_j が有界で $\gamma = \inf_{x,\xi} |\det \frac{\partial(z,\zeta)}{\partial(x,\xi)}| > 0$ が成り立てば次の不等式が成り立つ。

$$I(\Phi, a, \nu)(x_L, \xi_L, x_0) = e^{-i\nu\Phi^*(x_L,\xi_L,x_0)} b(x_L, \xi_L, x_0). \tag{9}$$

さらに、正定数 C_1 と正整数 K が存在して

$$|b(x_L, \xi_L, x_0)| \leq \gamma^{-1} C_1^L A_K \tag{10}$$

がなりたつ。定数 K は d のみに依って定まり、$\max_j t_j$が有界集合に留まればC_1も有界である。

注意 2.1 *1.* $5\kappa_2 T_L < 1$ ならば, 命題 *2.1* は $\gamma^{-1} < (1 - 5\kappa_2 T_L)^{2-2L}$ と 定理の結論が成り立つことを示す。

2. 上の評価は元の熊ノ郷ー谷口の定理とは以下の *2* 点で違う。*(1)* 熊ノ郷ー谷口の原論文 *[7]* では *Hörmander* の型の *Fourier* 積分作用素 を扱っていたのでウェイト関数に関する評価を出している。しかし、*[8]* ではウェイトなしの評価しか証明できなかったが、その後、ウェイトを持つ場合にも、熊ノ郷 直人 *[9]* が我々の考え方で証明出来ることを示した。*(2)* 上のここで紹介した定理では、 γ^{-1} があからさまに現われている。

3 定理の証明

命題 2.1の証明からはじめる。この目的には、ベクトル (x, ξ) にノルム

$$\|(x,\xi)\|_{l^\infty} = \max_{1 \leq j \leq (L-1)} (\max(|x_j|, |\xi_j|))$$

を考える。写像 $\mathcal{F}$ をもっと便利な形に書き換える。差分作用素の表現行列 Δ_1を用いる。$\boldsymbol{R}^{L-1}$, i.e.,

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ -1 & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & 0 & -1 & 1 & \end{pmatrix}, \tag{11}$$

つぎの $(2L-2) \times (2L-2)$ 行列を使う。

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\Delta_1 & 0 \\ 0 & -{}^t\Delta_1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

ここで ${}^t\Delta_1$ は行列 Δ_1の転置行列である。

$$\Psi = \begin{pmatrix} t_1\partial_{\xi_1}\phi_1(x_1,\xi_1,x_0) \\ t_2\partial_{\xi_2}\phi_2(x_2,\xi_2,x_1) \\ \vdots \\ t_{L-1}\partial_{\xi_{L-1}}\phi_{L-1}(x_{L-1},\xi_{L-1},x_{L-2}) \\ t_1\partial_{x_1}\phi_1(x_1,\xi_1,x_0)+t_2\partial_{x_1}\phi_2(x_2,\xi_2,x_1) \\ t_2\partial_{x_2}\phi_2(x_2,\xi_2,x_1)+t_3\partial_{x_2}\phi_3(x_3,\xi_3,x_2) \\ \vdots \\ t_{L-1}\partial_{x_{L-1}}\phi_{L-1}(x_{L-1},\xi_{L-1},x_{L-2})+t_L\partial_{x_{L-1}}\phi_L(x_L,\xi_L,x_{L-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \xi_L \end{pmatrix}. \tag{13}$$

すると、方程式系 (5) と (6) を次のように書き換えられる。

$$^t\mathcal{F}(x,\xi) = {}^t(z,\zeta) = \Delta^t(x,\xi)+\Psi. \tag{14}$$

ここで $^t(x,\xi)$ は、 (x,ξ) の転置行列を表す。ここから、

$$\Delta^{-1} = -\begin{pmatrix} \Delta_1^{-1} & 0 \\ 0 & {}^t\Delta_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{ここで} \quad \Delta_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であって、

$$\Delta^{-1}\,{}^t(z,\zeta) = {}^t(x,\xi) + \Delta^{-1}\Psi \tag{15}$$

である。

方程式 (15) は Φ の停留点 (x^*,ξ^*) が写像 $-\Delta^{-1}\Psi$ の固定点であることを意味する。この写像 $-\Delta^{-1}\Psi$ は 次の節で縮小写像であることが証明できる。

有限次元のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{2(L-1)}$にノルム $\|*\|_{l^\infty}$を入れる。

命題 3.1 $T_L = \sum_{j=1}^{L} t_j$ を仮定する。このとき、 写像$\Delta^{-1}\Psi$の微分 $D\Delta^{-1}\Psi$ は

$$\|D\Delta^{-1}\Psi(x,\xi)\|_{l^\infty} \le 5\kappa_2 T_L \|(x,\xi)\|_{l^\infty}$$

を得る。

命題 2.1は命題 3.1から従う。実際 もし $5\kappa_2 T_L < 1$ が成り立つならば, 写像 $-\Delta^{-1}\Psi$ は縮小写像で唯一の不動点を持つ。命題 3.1 は微分写像 $D_{x,\xi}\Delta^{-1}\Psi$ は、固有値の絶対値が $5\kappa_2 T_L$以下であるような線形写像であることを意味するからである. 命題 2.1のはじめの部分はこのことと $|det\Delta| = 1$ という事実から 従う。

命題 2.1の後半は前半と Hadamard の大域的陰関数定理から従う。

命題 2.1 は命題 3.1の証明に帰着された。

命題 3.1の証明.

写像 Ψは次の行列表現をもつ:

$$D_{x,\xi}\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & {}^tA \end{pmatrix},$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix} t_1\partial_{x_1}\partial_{\xi_1}\phi_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ t_2\partial_{x_1}\partial_{\xi_2}\phi_2 & t_2\partial_{x_2}\partial_{\xi_2}\phi_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t_3\partial_{x_2}\partial_{\xi_3}\phi_3 & t_3\partial_{x_3}\partial_{\xi_3}\phi_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & t_4\partial_{x_3}\partial_{\xi_4}\phi_4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} t_1{\partial_{\xi_1}}^2\phi_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t_2{\partial_{\xi_2}}^2\phi_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3{\partial_{\xi_3}}^2\phi_3 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & t_{L-1}{\partial_{\xi_{L-1}}}^2\phi_{L-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} t_1{\partial_{x_1}}^2\phi_1 + t_2{\partial_{x_1}}^2\phi_2 & t_2\partial_{x_2}\partial_{x_1}\phi_2 & 0 & 0 & \dots \\ t_2\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_2 & t_2{\partial_{x_2}}^2\phi_2 + t_3{\partial_{x_2}}^2\phi_3 & t_3\partial_{x_3}\partial_{x_2}\phi_3 & 0 & \dots \\ 0 & t_3\partial_{x_2}\partial_{x_3}\phi_3 & t_3{\partial_{x_3}}^2\phi_3 + t_4{\partial_{x_3}}^2\phi_4 & t_4\partial_{x_4}\partial_{x_3}\phi_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

である。

証明すべきことはつぎのことである。

$$\|\Delta^{-1}D_{x,\xi}\Psi^t(x,\xi)\|_{l^\infty} \le 5\kappa_2 T_L\|^t(x,\xi)\|_{l^\infty}. \tag{16}$$

式 (16) を示すため。空間 $\boldsymbol{R}^{L-1}\times\boldsymbol{R}^{L-1}$ に l^1 ノルムをいれる。つまり:

$$\|^t(x,\xi)\|_{l^1} = \sum_{j=1}^{L-1}|x_j| + |\xi_j|$$

次の不等式が成り立つ:

$$\|\Delta^{-1t}(x,\xi)\|_{l^\infty} \le \|^t(x,\xi)\|_{l^1}$$

$$\|D_{x,\xi}\Psi^t(x,\xi)\|_{l^1} \le 5\kappa_2 T_L\|^t(x,\xi))\|_{l^\infty}.$$

これらから命題 3.1は証明された。

定理の証明. 簡単のため、$d=1$ とする。勿論、$d>1$ の場合も本質的に同じことである。

$$M_j = \frac{1 + i\zeta_j(x_{j+1},\xi_{j+1},x_j,\xi_j,x_{j-1})\partial_{x_j}}{1+\nu\zeta_j(x_{j+1},\xi_{j+1},x_j,\xi_j,x_{j-1})^2}, \quad 1\le j\le L-1,$$

$$N_j = \frac{1 + iz_j(x_j, \xi_j, x_{j-1})\partial_{\xi_j}}{1 + \nu z_j(x_j, \xi_j, x_{j-1})^2}, \quad 1 \le j \le L-1$$

という偏微分作用素を定義すると、

$$M_j e^{-i\nu\Phi} = e^{-i\nu\Phi}, \quad N_j e^{-i\nu\Phi} = e^{-i\nu\Phi}.$$

が成り立つ。M_j の共役作用素を M_j^* と表すと

$$\begin{aligned} & I(\Phi, a, \nu)(x_L, \xi_L, x_0) \\ = & \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} \int_{R^{2(L-1)}} M_j e^{-i\nu\Phi} a(x_L, \xi_L, \ldots, x_1, \xi_1, x_0) \prod_{j=1}^{L-1} d\xi_j dx_j \\ = & \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} \int_{R^{2(L-1)}} e^{-i\nu\Phi} M_j^* a(x_L, \xi_L, \ldots, x_1, \xi_1, x_0) \prod_{j=1}^{L-1} d\xi_j dx_j. \end{aligned}$$

である。同様に M_j の代わりに N_j を使っても同じことがいえる。結局, $I(\Phi, a, \nu)$ を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} & I(\Phi, a, \nu)(x_L, \xi_L, x_0) \\ = & \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} \int_{R^{2(L-1)}} e^{-i\nu\Phi} N_{L-1}^{*2} M_{L-1}^{*2} \ldots N_1^{*2} M_1^{*2} a \prod_{j=1}^{L-1} d\xi_j dx_j. \end{aligned} \tag{17}$$

$$D_{x_j} = \nu^{-1/2}\partial_{x_j}, \quad D_{\xi_j} = \nu^{-1/2}\partial_{\xi_j}.$$

とおくと、

$$\begin{aligned} M_j^* &= a_j^0(x_{j+1}, \xi_{j+1}, x_j, \xi_j, x_{j-1}) D_{x_j} + a_j^1(x_{j+1}, \xi_{j+1}, x_j, \xi_j, x_{j-1}) \\ N_j^* &= b_j^0(x_j, \xi_j, x_{j-1}) D_{\xi_j} + b_j^1(x_j, \xi_j, x_{j-1}) \end{aligned}$$

である。ただし、

$$a_j^0 = \frac{-i\nu^{1/2}\zeta_j}{1 + \nu\zeta_j^2}, \qquad a_j^1 = \frac{1}{1 + \nu\zeta_j^2} + D_{x_j}\{\frac{-i\nu^{1/2}\zeta_j}{1 + \nu\zeta_j^2}\}$$
$$b_j^0 = \frac{-i\nu^{1/2}z_j}{1 + \nu z_j^2}, \qquad b_j^1 = \frac{1}{1 + \nu z_j^2} + D_{\xi_j}\{\frac{-i\nu^{1/2}z_j}{1 + \nu z_j^2}\}.$$

これら a_j^0 と a_j^1 の大きさを評価したい。

命題 3.2 $k = 0$ または$= 1$. とする。任意の$\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, \alpha_j, \beta_j, \alpha_{j-1}$に対して、正数 C があって、

$$\begin{aligned} |D_{x_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} D_{\xi_{j+1}}^{\beta_{j+1}} D_{x_j}^{\alpha_j} D_{\xi_j}^{\beta_j} D_{x_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} a_j^k| &\le C(1 + \nu\zeta_j^2)^{-1/2}, \\ |D_{x_j}^{\alpha_j} D_{\xi_j}^{\beta_j} D_{x_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} b_j^k| &\le C(1 + \nu z_j^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. これは、ζ_j, z_j のすべての偏導関数が有界であることから証明される。

上述の命題 3.2 の定数 Cは $\alpha_j, \ldots, \beta_{j-1}$に依存する。そこで $2L-2$ 個の微分作用素 $N^{*2}_{L-1}, M^{*2}_{L-1}, \ldots, N^{*2}_1, M^{*2}_1$ を合成したものは、位数 が $4L-4$ である．一見したところでは M^*_1の係数が $4L-5$ 回微分されて、L が ∞ に大きくなると微係数の大きさがコントロール出来なくなるように思うかも知れないが、実際は、 M^*_1 の係数は変数 $x_3, \xi_3, \ldots$ とは独立なので、それらは、高々7 回しか微分されない。したがって、L をいくら大きくしても、M^*_1の微係数の大きさはコントロール出来るのである。

この結果

$$\begin{aligned} &|N^{*2}_{L-1} M^{*2}_{L-1} \ldots N^{*2}_1 M^{*2}_1 a(x_L, \xi_L, \ldots, x_1, \xi_1, x_0)| \\ \leq\ & C^{2(L-1)} \prod_{j=1}^{L-1} (1+\nu\zeta_j^2)^{-1}(1+\nu z_j^2)^{-1} A_2. \end{aligned} \tag{18}$$

という評価を得る。これから (17) によって、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &|I(\Phi, a, \nu)(x_L, \xi_L, x_0)| \\ \leq\ & \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} C^{2L-2} \int_{R^{2L-2}} \prod_{j=1}^{L-1} (1+\nu\zeta_j^2)^{-1}(1+\nu z_j^2)^{-1} A_6 \prod_{j=1}^{L-1} d\xi_j dx_j. \end{aligned} \tag{19}$$

変数変換 $(x, \xi) \to (z, \zeta)$ によって, (19) の右辺は次式に等しい。

$$\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} C^{2L-2} A_6 \int_{R^{2L-2}} \prod_{j=1}^{L-1} (1+\nu\zeta_j^2)^{-1}(1+\nu z_j^2)^{-1} |J|^{-1} \prod_{j=1}^{L-1} d\zeta_j dz_{j-1}. \tag{20}$$

ここで、J はヤコビ行列式である。定理の仮定から

$$|J|^{-1} \leq \gamma^{-1}$$

である。 (20) にこれをつかうと (19) の右辺は

$$\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{L-1} (2C)^{2L-2} A_6 \gamma^{-1} \int_{R^{2L-2}} \prod_{j=1}^{L-1} (1+\nu\zeta_j^2)^{-1}(1+\nu z_j^2)^{-1} \prod_{j=1}^{L-1} d\zeta_j dz_{j-1}$$

で評価される。最後に変数変換 $\nu\zeta_j \to z_j$ と $\nu z_j \to y_j$ をすると、ある正定数 C_1が存在して、目的の評価

$$|I(\Phi, a, \nu)(x_L, \xi_L, x_0)| \leq C_1^{L-1} A_6 \gamma^{-1} \tag{21}$$

がなりたつ。定理は証明された。

微係数についての評価も得られるが、詳細は [8] を参照していただきたい。

参考文献

[1] D. Fujiwara. Remarks on convergence of the Feynman path integrals. *Duke Math. J.*, 47,pp.559–600, 1980.

[2] D. Fujiwara. Some Feynman path integrals as oscillatory integrals over a Sobolev manifolds. In *Proc. International conference on Functional Analysis in memory of Professor Kôsaku Yosida.*, pp.39–53, Springer, 1993.

[3] D. Fujiwara. Some Feynman path integrals as oscillatory integrals over a Sobolev manifols. 1992. Preprint.

[4] D. Fujiwara. The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension. *Nagoya Math. J.*, 124,pp.61–97, 1991.

[5] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127,pp.79–183, 1971.

[6] H. Kumano-go. *Pseudo-differential operators.* MIT press, Cambridge, Mass. U.S.A., 1982.

[7] H. Kumano-go & K. Taniguchi. Fourier integral operators of multiphase and the fundamental solution for a hyperbolic system. *Funkci. Ekvac.*, 22,pp.161–196, 1979.

[8] D. Fujiwara, N. Kumano-go & K. Taniguchi. A Proof of estimates of Kumano-go-Taniguchi type for multiproduct of Fourier integral operators. *Funkci. Ekvac.*, 40,pp.459–470, 1997.

[9] N. Kumano-go. A Proof of H.Kumano-go-Taniguchi theorem for multi-products of Fourier integral operators. To appear in Osaka Journal of Mathematics.